Modus ponens $\dfrac{A \to B \quad A}{B}$

Prolog konkret:

a

$b \leftarrow a$

Answer sets: $\{a, b\}$ ist die einzige Antwortmenge von

Modelle der zugeh. Theorie $th = \{a, a \to b\}$ in klassischer AL:

$$\{\{a,b\}, \{a,b,c\}, \dots \{a,b,c,d,e,\dots\} \dots\}$$

$$\Updownarrow$$

$m : \{a,b,c,d \dots\} \to \mathbb{B}$ $\quad m\, b = \text{True}$

$m\, a = \text{True}$ $\quad m\, x = \text{False}$

Klassisch: Abzählbare Menge von Aussage-variablen:

$$\mathrm{Var} = \{X_0, X_1, X_2, \dots\}$$

$$\text{Operatoren} = \{\wedge, \vee, \neg\}$$

$$(\mathbb{P} =) \text{Interpretation} = \mathrm{Var} \to \mathbb{B}$$

$$\wedge_{\mathbb{B}} : \mathbb{B} \to \mathbb{B} \to \mathbb{B}$$

$$\vee_{\mathbb{B}} : \mathbb{B} \to \mathbb{B} \to \mathbb{B}$$

$$\neg_{\mathbb{B}} : \mathbb{B} \to \mathbb{B}$$

Formeln:

data F where

$$V : \mathrm{Var} \to F$$

$$\wedge : F \to F \to F$$

$$\vee : F \to F \to F$$

$$\neg : F \to F$$

$$\mathrm{eval} : \mathbb{P} \to F \to \mathbb{B}$$

$$\mathrm{eval}\ f\ (V\,x) = f\,x$$

$$\mathrm{eval}\ f\ (A \wedge B) = (\mathrm{eval}\ f\ A) \wedge_{\mathbb{B}} (\mathrm{eval}\ f\ B)$$

$$\mathrm{eval}\ f\ (A \vee B) = (\mathrm{eval}\ f\ A) \vee_{\mathbb{B}} (\mathrm{eval}\ f\ B)$$

$$\mathrm{eval}\ f\ (\neg A) = \neg_{\mathbb{B}} (\mathrm{eval}\ f\ A)$$

Klassisch : Abzählbare Menge von Aussagenvariablen:

$Var = \{X_0, X_1, X_2, \dots\}$

Operatoren $= \{\wedge, \vee, \neg\}$

(IP =) Interpretation $: Var \to \mathbb{B}$

$\wedge_{\mathbb{B}} : \mathbb{B} \to \mathbb{B} \to \mathbb{B}$

$\vee_{\mathbb{B}} : \mathbb{B} \to \mathbb{B} \to \mathbb{B}$

$\neg_{\mathbb{B}} : \mathbb{B} \to \mathbb{B}$

data F where

$V : Var \to F$

$\wedge : F \to F \to F$

$\vee : F \to F \to F$

$\neg : F \to F$

$eval : IP \to F \to \mathbb{B}$

$eval\ f\ (V x) = f x$

$eval\ f\ (A \wedge B) = (eval\ f\ A) \wedge_{\mathbb{B}} (eval\ f\ B)$

$eval\ f\ (A \vee B) = (eval\ f\ A) \vee_{\mathbb{B}} (eval\ f\ B)$

$eval\ f\ (\neg A) = \neg_{\mathbb{B}} (eval\ f\ A)$

Theorie:

$Th : Type$

$Th = List\ F$ (eigentlich $\mathcal{P}(F)$)

Modell:

$Mo : Th \to Type$

$$Mo\ th = \sum_{m:IP} \underbrace{\prod_{f:F} f \in th \to (eval\ m\ f =_{\mathbb{B}} True)}_{:Type}$$

$m : IP$ ist ein Modell einer Theorie $th : Th \overset{def}{\iff}$

$\forall f : F .\ f \in th \to$ $eval\ m\ f = True$

Alternativ (vielleicht besser?):

Modellrelation:

$MR : Th \to IP \to Type$

$$MR\ th\ m = \prod_{f:F} f \in th \to eval\ m\ f =_{\mathbb{B}} True$$

$\_\models\_ : IP \to Th \to Type$

Unter Verwendung von MR ist dann:

$$Mo\ th = \sum_{m:IP} MR\ th\ m$$

25.05.

Wrong question!

In what sense "equivalent"?

Is rule equivalent to formula?

$$Y \leftarrow X \qquad \neg X \vee Y$$

Defined semantically, i.e. via (classical) models

Classically: $(X \to Y) \leftrightarrow \neg X \vee Y$ is a tautology!

$$\vDash (X \to Y) \leftrightarrow \neg X \vee Y$$

i.e. the type family

$$\mathrm{MR}\big((X \to Y) \leftrightarrow (\neg X \vee Y)\big)$$

$$: \mathbb{P} \to \mathrm{Type}$$

has a "section"!

we had

$$m \vDash [f] \quad : \mathrm{Type}$$

$$m \vDash [f] = \prod_{g : [f]} \mathrm{eval}\ m\ g =_{\mathbb{B}} \mathrm{True}$$

with abuse of notation (single formula on the right):

$$m \vDash f = \mathrm{eval}\ m\ f =_{\mathbb{B}} \mathrm{True}$$

another abuse of notation: "f is a tautology"

if every $m : \mathbb{P}$ is a model of f: $\qquad \vDash f :\equiv \prod_{m : \mathbb{P}} m \vDash f$

<u>or</u>

$\vdash (x \to y) \Leftrightarrow (\neg x \vee y)$ "Beweisbarkeitsrelation"

$\models f \Leftrightarrow \vdash f$ <u>provability</u> : formula is <u>provable</u> (without any assumption!)

" $\to$ " Completeness
" $\leftarrow$ " Soundness
} of classical propositional logic

Locality of formula "packing":

$a \leftarrow b \quad a \leftarrow c \wedge \neg d$ (1)

$e \vee p \leftarrow b \quad e \vee p \leftarrow c \wedge \neg d$

is ~~strongly~~ equivalent to

$a \wedge (e \vee p) \leftarrow b \vee (c \wedge \neg d)$ (2)

also with context. e.g. (1) and (2) also equivalent to

$a \wedge (e \vee p) \leftarrow b \quad a \leftarrow c \wedge \neg d \quad e \vee p \leftarrow c \wedge \neg d$

Let A, B be sets of (logic program) rules
(or, better, propositional theories)

A is "strongly equivalent" to B

$\overset{def}{\iff}$ $\forall$ C (set of rules) (or, better, propositional theories)

$A \cup C$ has the same answer sets as

$B \cup C$

$p \leftarrow 0 \leq \{q=1, r=-1\}$ is an "aggregation",

it is an abbreviation for

$p \leftarrow \neg q \wedge \neg r$ $\quad$ $p \leftarrow q \wedge \neg r$ $\quad$ $p \leftarrow q \wedge r$

$\cancel{p \leftarrow \neg q \wedge r}$

$$p \leftarrow \neg(\neg q \wedge r)$$
$$\text{"}\Leftarrow\text{"}$$
$$p \leftarrow q \vee \neg r$$
$$\text{"}\Leftarrow\text{"}$$
$$p \leftarrow (q \leftarrow r)$$

Equivalence of (3) and (4) is at least plausible

1.6.

originally : 90th (Gelfond, Lifschitz) ... verallgemeinert...

$$p \leftarrow (q \leftarrow r)$$

$$p \leftarrow \neg r$$
$$p \leftarrow q$$

$$p \vee \neg q \vee r \leftarrow$$

claim : these are strongly equivalent !?

As (classical) propositional formulas:

$$(r \rightarrow q) \rightarrow p$$
$$\equiv_{PL_0} p \vee \neg(r \rightarrow q)$$
$$\equiv_{PL_0} p \vee \neg(q \vee \neg r)$$
$$\equiv_{PL_0} p \vee (\neg q \wedge \neg\neg r)$$
$$\equiv_{PL_0} p \vee (\neg q \wedge r)$$

and also

$$(p \leftarrow q) \vee r \qquad \begin{array}{l} p \vee r \leftarrow q \\ \neg q \vee r \leftarrow \neg p \end{array}$$

main result is proved in two ways

(1) with syntactic rec. transf.

(2) starting from countermodels (in Here-and-There)

in analogy to CNF transform in classical logic:

(1') with syntactic rec. transf.

(2') starting from countermodels (classical)

Interpretation $(X,Y) \mathrel{\hat{=}} f : \Sigma \to \mathbb{B}$ mit (partieller Funktion)

one possibility

$$f\ p = \begin{cases} \text{true} & \text{if } p \in X \\ \text{false} & \text{if } p \notin Y \\ \text{undefined} & \text{otherwise} \end{cases}$$

or $(X,Y) \mathrel{\hat{=}} f : \Sigma \to \text{Maybe } \mathbb{B}$

$$f\ p = \begin{cases} \text{Just true} & ;\ \text{if } p \in X \\ \text{Just false} & ;\ \text{if } p \notin Y \\ \text{Nothing} & ;\ \text{otherwise} \end{cases}$$

```
data Maybe : U → U where
  Nothing : {A : U} → Maybe A
  Just    : {A : U} → A → Maybe A
```

$\forall\, X \subseteq Y \in \Sigma$:

$$\Big((X,Y) \models_{HT\text{"ohne"}} F \Big) \overset{?}{\iff} \Big(X \models_{PL} F \Big)$$

or intuitionistic?

! check: $X \models \neg\neg a \to a$

$$(X,Y) \models_{HTohne} \neg\neg\varphi \to \varphi$$

Ab hier $\models := \models_{HTohne}$

$$(X,Y) \models \neg\neg\varphi \to \varphi$$

$$\iff \Big((X,Y) \models \neg\neg\varphi \text{ implies } (X,Y) \models \varphi \Big)$$

$$\iff \Big(\big((X,Y) \models \neg\varphi \text{ implies } (X,Y) \models \bot \big) \text{ implies } (X,Y) \models \varphi \Big)$$

$$\iff \Big(\big(((X,Y) \models \varphi \text{ implies } (X,Y) \models \bot) \text{ implies } (X,Y) \models \bot \big) \text{ implies } (X,Y) \models \varphi \Big)$$

negate $(X,Y) \not\models \neg\neg\varphi \to \varphi$

$\Leftrightarrow \Big(\big(((X,Y)\models\varphi \text{ implies } (X,Y)\models\bot) \text{ implies } (X,Y)\models\bot \big) \ \cancel{\text{implies}} \ (X,Y)\models\varphi \Big)$

$\Leftrightarrow \big(((X,Y)\models\varphi \text{ implies } (X,Y)\models\bot) \text{ implies } (X,Y)\models\bot \big) \text{ and } (X,Y)\not\models\varphi$

$(X,Y)\models\neg\varphi$
$\Leftrightarrow (X,Y)\not\models\varphi$

Tarski

HT"glue"!!

negate again :

$(X,Y) \models \neg\neg\varphi \to \varphi$

$\Leftrightarrow \big(((X,Y)\models\varphi \text{ implies } (X,Y)\models\bot) \ \cancel{\text{implies}} \ (X,Y)\models\bot \big) \text{ or } (X,Y)\models\varphi$

$\Leftrightarrow \Big(\big(((X,Y)\models\varphi \text{ implies } (X,Y)\models\bot) \text{ and } (X,Y)\not\models\bot \big) \text{ or } (X,Y)\models\varphi$

$\Leftrightarrow \big(((X,Y)\models\varphi \text{ implies } (X,Y)\models\bot) \ \text{ or } (X,Y)\models\varphi$

$\iff$

$\big((X,Y) \not\models \varphi$ or $(X,Y) \models \bot \big)$ or $(X,Y) \models \varphi$

$\iff$

$(X,Y) \not\models \varphi$ or $(X,Y) \models \varphi$

Zusammenfassung: Wird die Metalogik als klassisch angenommen, so liefert $(\cdot,\cdot) \models_{\mathrm{HT ohne}}$ wieder die klassische Logik

---

N.B. $\varphi \to \neg\neg\varphi$ gilt auch in intuitionistischer Logik

Prop. 2 Für alle Formeln F, $X \subseteq Y \subseteq V$

gilt $(X, Y) \models \neg F \iff Y \models \neg F$

$(X,Y) \models \neg F$

$\iff$ { Def. }

$\Big(\underbrace{(X,Y) \models F \text{ implies } (X,Y) \models \bot} \Big)$ and $Y \models \neg F$

$\iff$ { ~~siehe oben~~ ... }

$(X,Y) \not\models F$ and $Y \models \neg F$

$\iff$

$(X,Y) \not\models F$ and $Y \not\models F$

$\iff$ $(X,Y) \not\models F$ and $(Y,Y) \not\models F$

$\iff$ { Kontrapos. Prop. 1 }

$(Y,Y) \not\models F \iff Y \not\models F \iff Y \models \neg F$

15.06. natural deduction: (natürliches Schließen)

in Abgrenzung zum Hilbertkalkül mit einziger Schlußregel Modus Ponens: $\dfrac{A \to B \quad A}{B}$

Axiome: $\dfrac{}{\bot \to A}$ (oder $\dfrac{\bot}{A}$) (vgl. auch LEM: $\dfrac{}{A \vee \neg A}$)

Ableitungsregeln: z.B. $\dfrac{A \quad B}{A \wedge B}$ $\wedge$-Intr.

... und für andere Junktoren

hypothetical derivations:

$$\dfrac{\begin{matrix}[A] \\ \vdots \\ B\end{matrix}}{A \to B} \qquad \dfrac{\begin{matrix}[a:A] \\ \vdots \\ Pa\end{matrix}}{\forall a:A \,.\, Pa}$$

wollen intuitionisch zeigen:

$$\neg\neg\neg\varphi \to \neg\varphi$$

<u>Beweis</u> Seien $\neg\neg\neg\varphi$ und φ angenommen.
Wir führen dies zu einem Widerspruch.
Aus φ erhalten wir $\neg\neg\varphi$.
$(\lambda a.\lambda\psi.\psi a : A \to (A \to \bot) \to \bot)$

Aus $\neg\neg\neg\varphi$ und $\neg\neg\varphi$ erhalten wir den geforderten Widerspruch.

(5) $\quad F \vee (F \to G) \vee \neg G$

(DM) $\quad \neg(F \wedge G) \to \neg F \vee \neg G$

Wollen zeigen: (5) $\to$ (DM).

Seien (5) und $\neg(F \wedge G)$ angenommen. Es ist $\neg F \vee \neg G$ zu zeigen. Nach Fallunterscheidung bei (5):

1. F gilt. Dann gilt auch $\neg G$. Denn gälte G, gäbe es Wid. zu $\neg(F \wedge G)$.

3. $\neg G$ gilt. ✓

2. $F \to G$ gilt. Wir zeigen $\neg F$. Sei dafür F angenommen, wir leiten Wid. her. Aus F und $F \to G$ erhalten wir G, also auch $F \wedge G$ im W. zu $\neg(F \wedge G)$.

Äquivalenz von $F \vee G$ und ?

$$((F \to G) \to G) \wedge ((G \to F) \to F)$$

Zumindest „$\to$" ist klar: 2 symmetrische Fälle:

1. F gilt oder 2. G gilt.

1.: Dann gilt $(G \to F) \to F$ trivialerweise.

$(F \to G) \to G$: Sei $(F \to G)$ angenommen, mit gegebenem F und Modus ponens haben wir G. ∎

Für „$\leftarrow$" müssen wir wahrscheinlich bei Łukasiewicz (1941) schauen.

Bemerkung Jan: "Program completion" gibt Intuition

Bemerkung Thomas: "Twelf definitions of a stable model".

Bemerkung Sebastian:

Warum ist $Y \models T \wedge \nexists X \subset Y . (X \models T)$

Keine geeignete Definition für Answerset?

22.06.

Seien T_1, T_2 Theorien. T_1 und T_2 sind equivalent in der Logik "Here and There" $\overset{def}{\iff}$

(A) $\forall (X, Y) \ldots \quad (X,Y) \models T_1 \iff (X,Y) \models T_2$.

T_1, T_2 heißen strongly eq. $\overset{def}{\iff}$

(B) $\forall T$ gilt $T_1 \cup T$ und $T_2 \cup T$ haben dieselben answer sets.

(B') T_1 und T_2 haben dieselben answer sets

(A) $\Rightarrow$ (B') Sei Y eine answer set von T_1.

Dann gilt $\forall X \subseteq Y$: $(X,Y) \models T_1$ gdw. $X = Y$

$\iff$ $(Y,Y) \models T_1$ $\wedge$ $\forall X \subsetneq Y.\ (X,Y) \not\models T_1$

Wir zeigen: $\forall X \subseteq Y.\ (X,Y) \models T_2 \iff X = Y$

Sei $X \subseteq Y$ b.a.f. $(X,Y) \models T_2 \overset{(A)}{\iff} (X,Y) \models T_1 \overset{(\text{Vor.})}{\iff} X = Y$

Also ist Y eine Answer set für T_2.

Wenn aus T_1 equivalent zu T_2 ~~folgt~~ würde

(A') $\forall T.\ T_1 \cup T$ equivalent zu $T_2 \cup T$, dann würde

auch (A) $\Rightarrow$ (B) gelten

und das ist so
(Jan)

Lemma $\forall F, G, K$

(6) $(F \to G) \to K$

(7) $(G \vee \neg F) \to K$

$K \vee F \vee G$

Proof. siehe Artikel, ist dort detailliert und gut verständlich.

Theorem 1 Proof.:

"Sufficient to ...":

Sei $T = \{\varphi_i \mid i \in I\}$ für eine (nicht notwendig endliche) Indexmenge I.

z.z. $\forall i \; \exists \pi_i . \; \varphi_i \Leftrightarrow \pi_i$, denn dann wäre

$\overline{\Pi} := \bigcup_{i \in \overline{I}} \Pi_i$ and equivalent to $\overline{T}$.

23.06.21

(2) $\quad (q \to p) \vee r$ equivalent to

(8) $\quad \big((r \to (q \to p)) \to (q \to p) \big) \wedge$

$$\big(((q \to p) \to r) \to r \big)$$

is instance of $\quad F \vee G \quad$ equivalent to

$$((F \to G) \to G) \wedge ((G \to F) \to F)$$

(Lukasiewicz ...) $\quad$ mit $F = r$

$G = q \to p$

$r \to (q \to p)$

eq. fm $\big((q \wedge (r \vee \neg\bot)) \to p\big) \wedge \big(q \to (p \vee \bot \vee \neg r)\big)$

Instance of $(F \to G) \to K$ eq. to

$\big((G \vee \neg F) \to K\big) \wedge \big(K \vee F \vee \neg G\big)$

??