6.7.21 zu Winkler: Wie macht man 2 aus 1?

letzten Abschnitt 2.2.:

Wie genau wird hier das Auswahlaxiom verwendet?

$\Rightarrow$ die Menge der Komplemente endlicher Teilmengen einer unendl. Menge X hat eine Auswahlfunktion

$$\text{pick} : \overbrace{\{X \setminus E \mid E \subseteq X, E \text{ endlich}\}}^{1 =: \text{CoFin}X \subseteq PX} \to X$$

mit $\text{pick}(A) \in A$

- jedes $A \in \{X \setminus E \mid \ldots\}$ ist nicht leer

nach Auswahlaxiom $\exists M \subseteq X . \forall A \in \text{CoFin}X . \exists m \in M . m \in A$

$R \subseteq \text{CoFin}X \times M \quad R = \{(A, m) \mid m \in A\}$

$\cup\!\!\mid$ pick, die Funktion ist.

Wir definieren $\forall n : \mathbb{N}.\ A_n \subseteq X$ wie folgt:

$$A_0 = \emptyset$$
$$A_{n+1} = \{\mathrm{pick}(X \setminus A_n)\} \cup A_n \qquad (A_n \subseteq A_{n+1} \dots)$$

Dann ist $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \subseteq X$ abzählbar unendlich.

Abschnitt 2.4.

Wo genau wird Auswahlaxiom verwendet?

$\Rightarrow$ zur Durchführung der Konstruktion brauchen wir konkrete Bijektionen der abzählbaren Teilmengen zu $\mathbb{N}$!

12.07.21 $\quad A$ abzählbar

$$A^* = \{\varepsilon\} \cup A \cup A^2 \cup A^3 \cup \dots \cup A^n \cup \dots = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A^n$$

$$\updownarrow \varphi_{A^2} \qquad \updownarrow \varphi_{A^3} \qquad \updownarrow \varphi_{A^n}$$

$$\cong \mathbb{N} \cup \mathbb{N} \cup \dots \cup \mathbb{N} \cup \dots$$

$$\cong \mathbb{N} \times \mathbb{N} \cong \mathbb{N}$$

dovetailing: $\quad A = \{a, b, c, d, \dots\}$

$\varphi_A : \mathbb{N} \to A$ (Bijektion) und auch $\varphi_{A^n} : \mathbb{N} \to A^n$ (Bijektion)

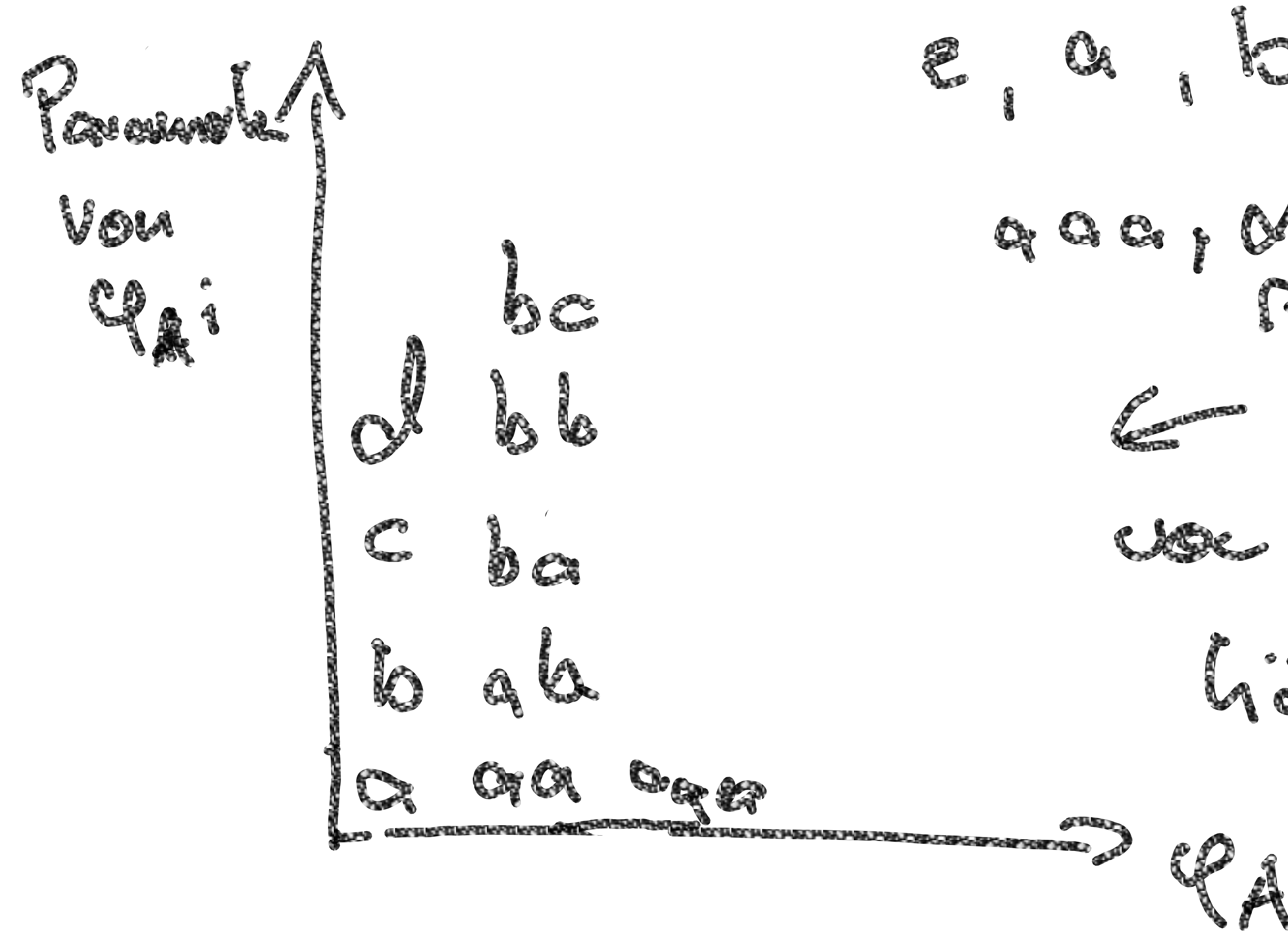
wie konstruieren $\varphi_{A^*} : \mathbb{N} \to A^*$ (Bijektion)

$\varphi_{A^*}\, 0 = \varepsilon$

$\varphi_{A^*}\, 1 = \varphi_A\, 0$

$\varphi_{A^*}\, 2 = \varphi_A\, 1$

$\varphi_{A^*}\, 3 = \varphi_{A^2}\, 0$



$\varepsilon, a, b, aa, c, ab, aaa, d, ba$

unendliche Wörter

Wahl φ_{A^i} abhängig?

Sebastian: dovetailing in Informatik:

berechnet Funktion $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ einen bestimmten Wert $n \in \mathbb{N}$?

Eingabe 0 ein Schritt

$\hookrightarrow$ Eingaben 0 und 1 zwei Schritte

$\hookrightarrow$ ... 0, 1, 2 drei Schritte

usw.

Annahme: $\exists\, f : X \to \mathcal{P}X$ surjektiv.

Wir definieren $T := \{x \in X \mid x \notin f(x)\} \subseteq X$

Wegen Surjektivität $\exists\, x_0 \in X$ mit $f(x_0) = T$.

$* \to$ Ann. $x_0 \in T$.

Dann ist nach Def. von T $x_0 \notin f(x_0) = T$ ↯

Ann. $x_0 \notin T$..

d.h. $x_0 \notin f(x_0)$. Nach Def. von T ist dann aber $x_0 \in T$ ↯. □

Alternative ab $* \to$ (ohne LEM):

Wir zeigen zunächst $x_0 \notin T$. Wäre $x_0 \in T$, dann.

Mit diesem Wissen dann so (ohne Annahme!) ... □

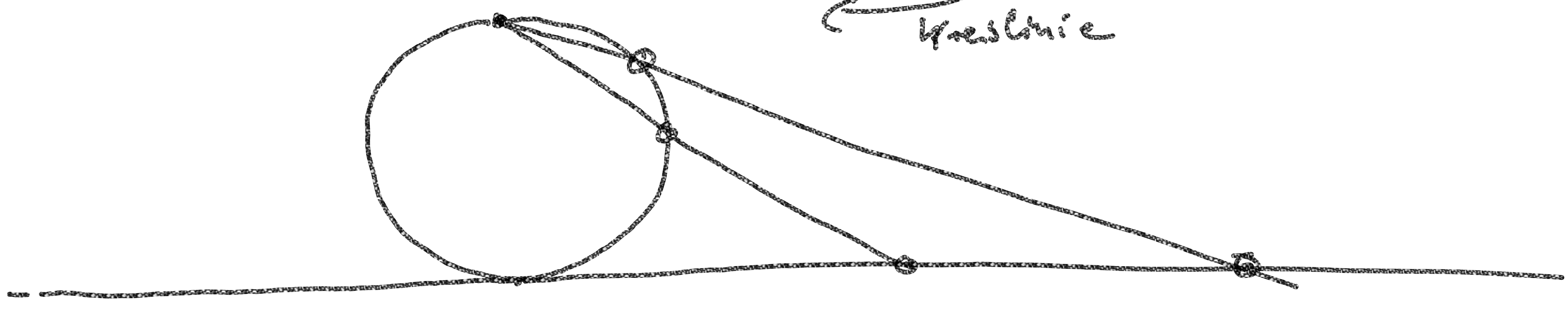
hatten so etwas 2012 :

Lawvere - 1969 - Diagonal Arguments in Cartesian Closed Categories.

22.07.21

Bijektion $(0,2\pi) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}$

Kreislinie



$z : \mathbb{N} \to S^1$

$h : S^1 \to S^1$

$hx = x + \alpha$

$D := \operatorname{im} z = \{ zn \mid n \in \mathbb{N} \}$

$h(D) = \{ h(zn) \mid n \in \mathbb{N} \} = \{ z(n+1) \mid n \in \mathbb{N} \}$

$h(zn) = z(n+1)$

$= D \setminus \{ z0 \}$

d.h. $\boxed{h \circ z = z \circ s}$

successor $sn = n+1$

$A \cup D = S^1 = A \cup h(D) \cup \{z_0\}$

eigentlichen Witz: $D = h(D) \cup \{z_0\}$

$\Updownarrow$

Hilbert's Hotel: $\mathbb{N} = \mathbb{N}^+ \cup \{0\}$

---

jetzt: ~~[illegible]~~ geg. $D \subseteq S^1$, D abzählbar

Suchen $\alpha \in (0, 2\pi)$ derart, daß h = Drehung um α die Eigenschaft hat, $D, h(D), h^2(D), \ldots$ alle disjunkt sind.

$D = \{d_i \mid i \in \mathbb{N}\}$

Bedingungen an α: insbesondere muß $\forall i \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}$ $h^n(d_i) \notin D$

d.h. $\forall i \in \mathbb{N}\, \forall n \in \mathbb{N}\, .\, \forall j \in \mathbb{N}$.

$h^n(d_i) \neq d_j$

d.h. $\forall \ldots$

$n \cdot \alpha + d_i \not\equiv d_j \mod 2\pi$ (*)

Hieraus folgt auch, daß $\forall\, n, m \in \mathbb{N}$ $h^n(D)$ disjunkt zu $h^m(D)$:

Ann.: $\exists\, d_i, d_j$ mit $n \cdot \alpha + d_i \equiv m\alpha + d_j$

$\Rightarrow (n-m)\alpha + d_i \equiv d_j$

(*) $\Rightarrow n \cdot \alpha \not\equiv d_j - d_i \mod 2\pi$

PuBT $\quad S^2 \sim S^2 \dot\cup S^2 \dot\cup B_3$

$S^2 \setminus D \sim S^2 \setminus D \dot\cup S^2 \setminus D \dot\cup B_3$

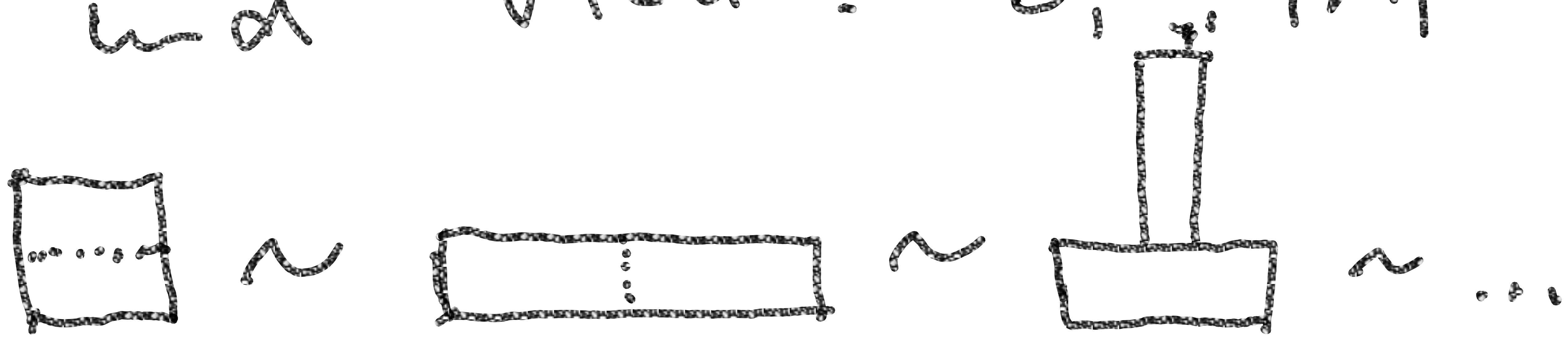
Zerlegungsgleichheit:

$A \sim B \overset{\text{def}}{=} \exists n \in \mathbb{N}.\ \exists A_0, \dots, A_{n-1}\ \exists B_0, \dots, B_{n-1}$

$\exists T_0, \dots, T_{n-1}$ Transformationen sd.

$A = \bigcup_{i<n} A_i \qquad B = \bigcup_{i<n} B_i$

und $\forall i<n.\ B_i = T_i A_i$



Zerlegungsgleichheit:

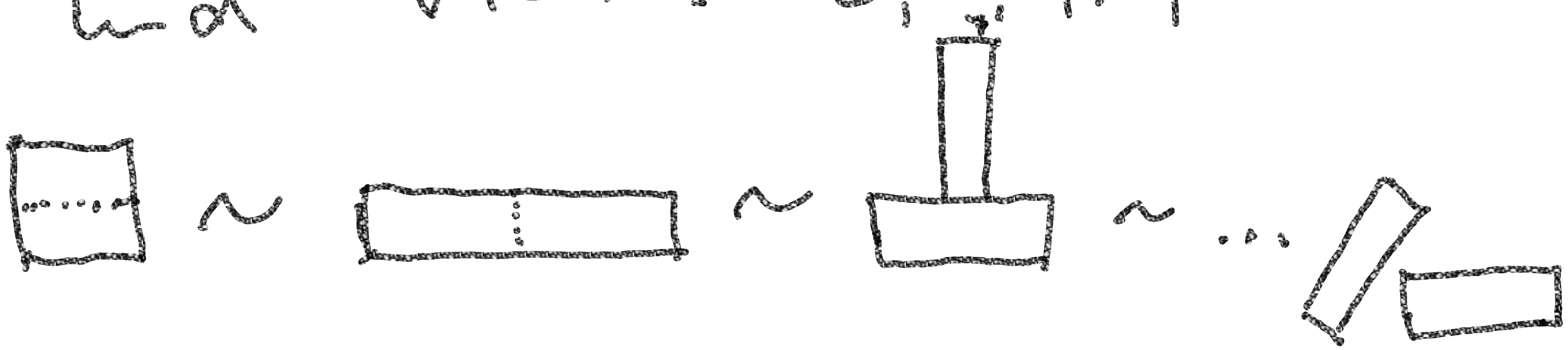
$$A \sim B \stackrel{def}{=} \exists n \in \mathbb{N}.\ \exists A_0, \ldots, A_{n-1}\ \exists B_0, \ldots, B_{n-1}$$

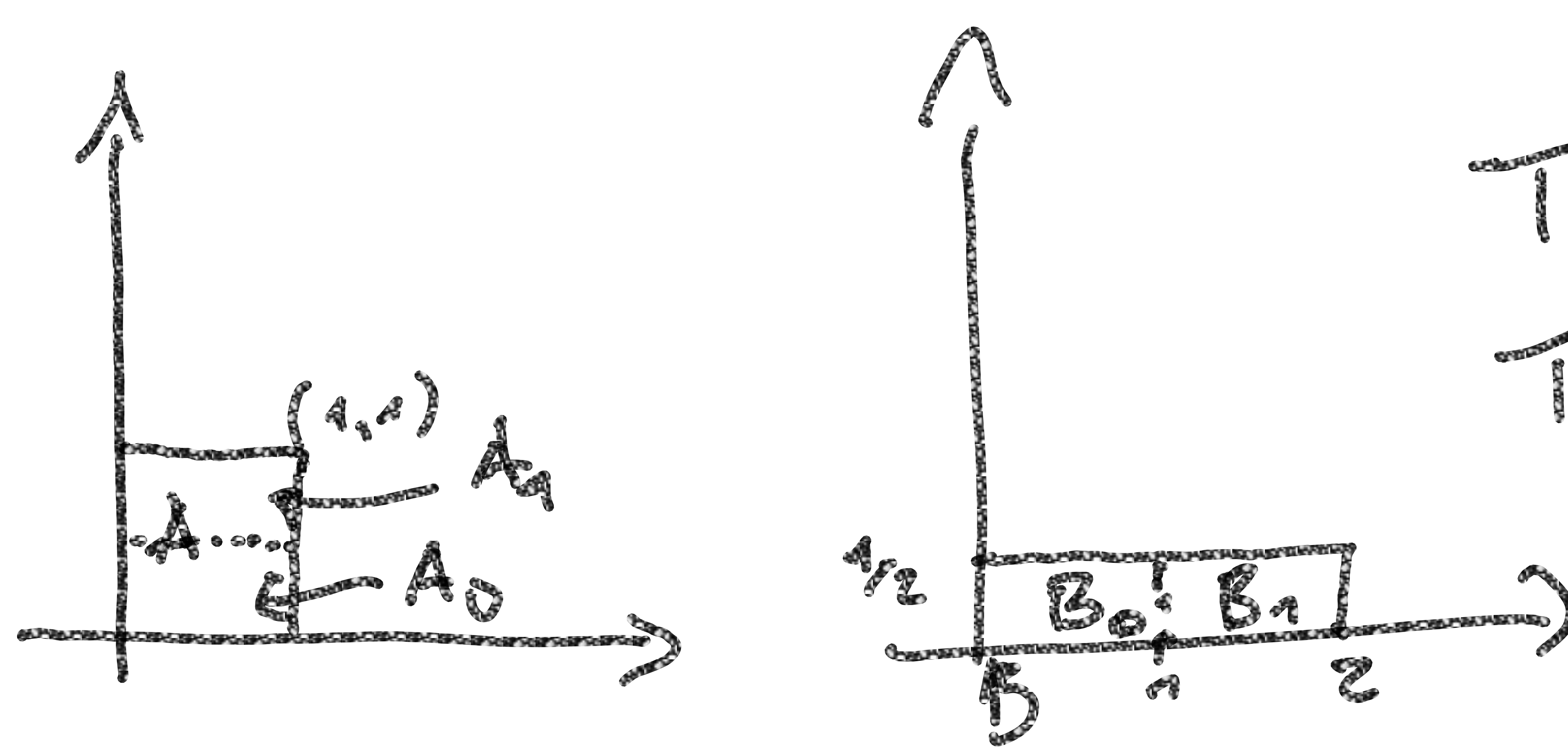
$\exists T_0, \ldots, T_{n-1}$ Transformationen s.d.

← „euklidische Bewegungen"

$$A = \dot{\bigcup_{i<n}} A_i \qquad B = \dot{\bigcup_{i<n}} B_i \qquad \text{d.h.}$$

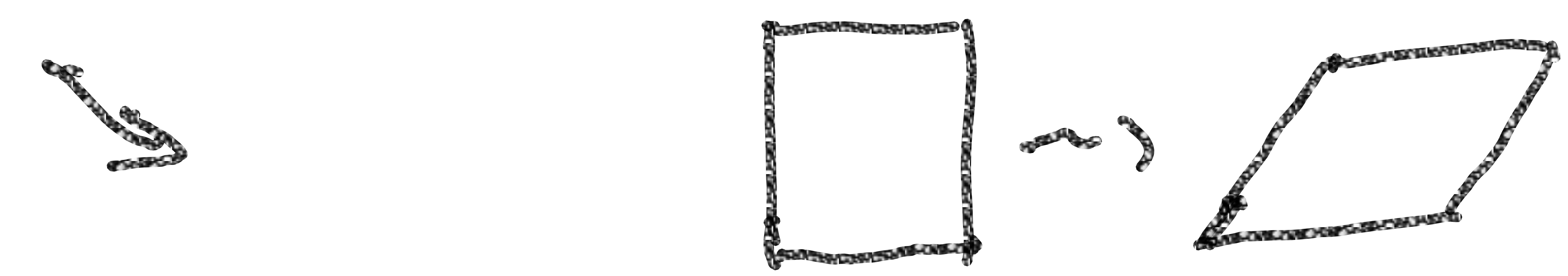
und $\forall i<n.\ B_i \stackrel{?}{=} T_i A_i$

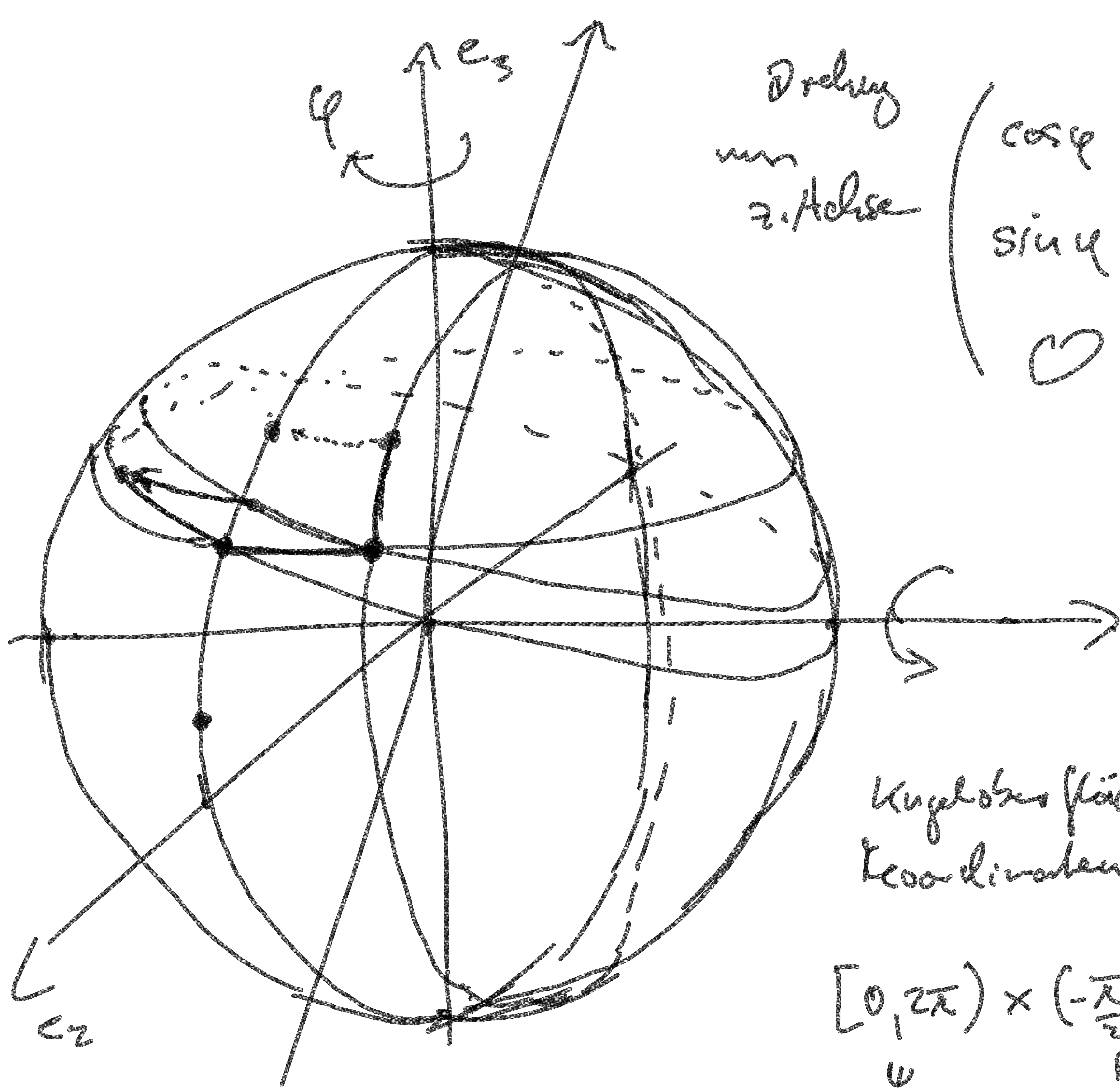




$T_0 = id$

$T_1 =$



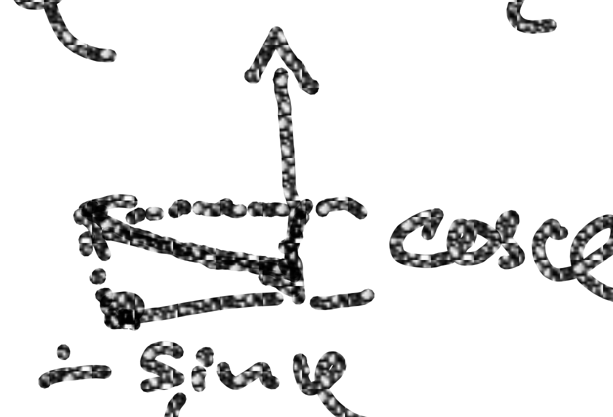


Drehung um z-Achse

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} \cos\varphi & \cdot\cdot \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$



Kugeloberfläche in sphärische Koordinaten:

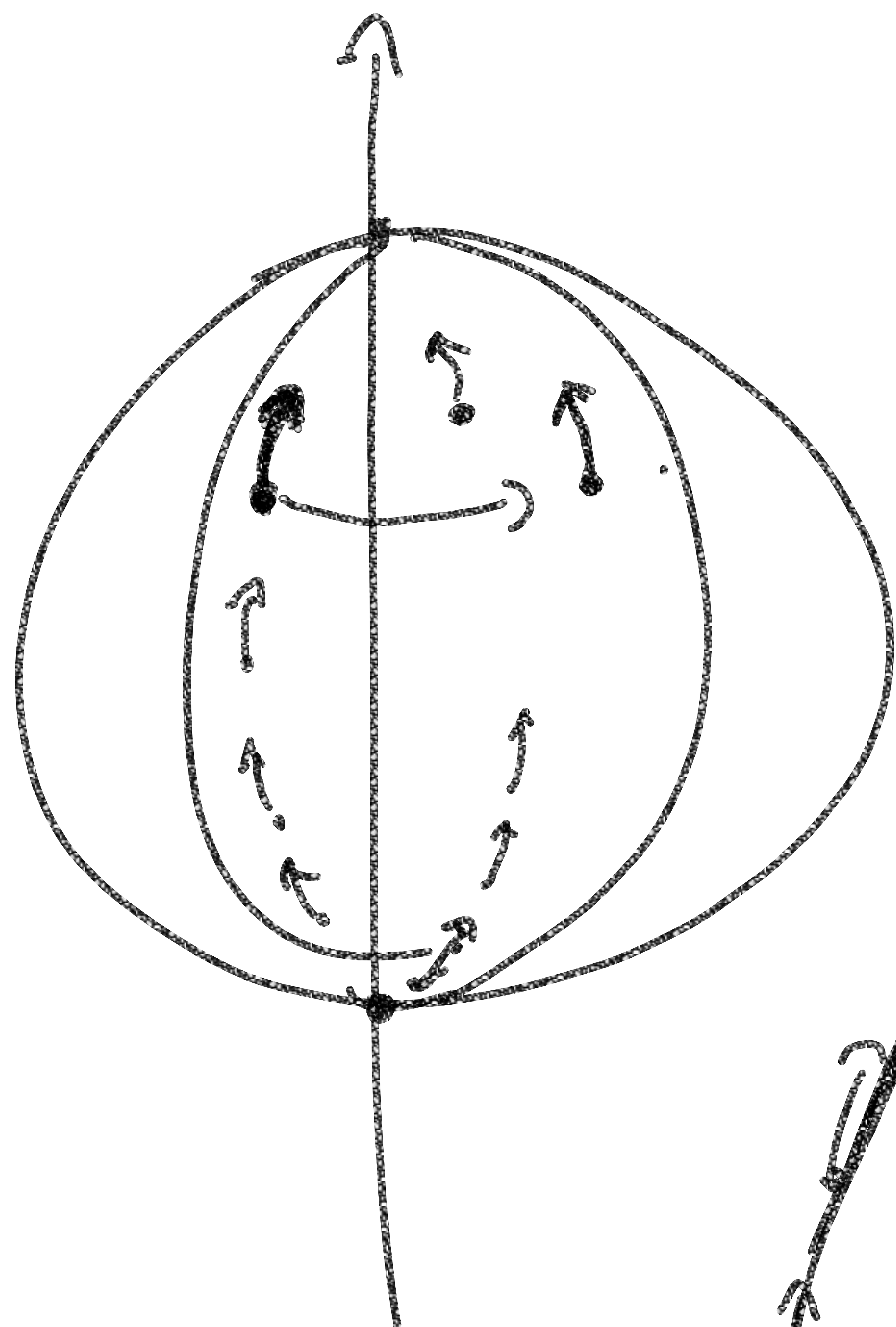
$[0, 2\pi) \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

Ψ

(λ, φ)

Rotation um z-Achse: um Winkel ψ

$(\lambda, \varphi) \longmapsto (\lambda + \psi, \varphi)$



$(\lambda, \varphi) \longmapsto (\lambda, \varphi + \psi)$

keine Drehung!

Aufgabe:
Drehungen sind
lineare
Abbildungen

$$d_i \neq d_j + k \cdot \alpha \quad \mod 2\pi$$

$$\Leftrightarrow \quad d_i - d_j \neq k \cdot \alpha \quad \mod 2\pi$$

$$\alpha_0 = \frac{d_i - d_j}{k}$$

$$\alpha_1 = \frac{d_i - d_j}{k} + \frac{i}{k} \cdot 2\pi$$

$$\overset{A}{\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \cdot \overset{B}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = AB$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = BA$$

$$AB - BA = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\psi & -\sin\psi \\ 0 & \sin\psi & \cos\psi \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi\cos\psi & \sin\varphi\sin\psi \\ \sin\varphi & \cos\varphi\cos\psi & -\cos\varphi\sin\psi \\ 0 & \sin\psi & \cos\psi \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\psi & -\sin\psi \\ 0 & \sin\psi & \cos\psi \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi\cos\psi & \sin\varphi\sin\psi \\ \sin\varphi & \cos\varphi\cos\psi & -\cos\varphi\sin\psi \\ 0 & \sin\psi & \cos\psi \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\psi & -\sin\psi \\ 0 & \sin\psi & \cos\psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi\cos\psi & \cos\varphi\cos\psi & -\sin\psi \\ \sin\varphi\sin\psi & \cos\varphi\sin\psi & \cos\psi \end{pmatrix}$$

mit $\psi \to 0$ geht $\sin\psi \to 0$, $\cos\psi \to 1$

$A = \{\sigma, \tau\}$

FA – "freie Gruppe über A" wird definiert als
eine Menge von Äquivalenzklassen von Wörtern
über $\{\sigma, \tau, \sigma^{-1}, \tau^{-1}\} =: \tilde{A}$

List $\tilde{A}$ Menge der Wörter über $\tilde{A}$

data $\sim$: List $\tilde{A}$ × List $\tilde{A}$ ⟶ Type where

$c1 : \{s : A\} \to [s, s^{-1}] \sim []$
$c2 : \{s : A\} \to [s^{-1}, s] \sim []$
$c3 : \{l_1, l_2 : \text{List}\,\tilde{A}\} \to l_1 \sim l_2 \to \{v, h : \text{List}\,\tilde{A}\} \to$
$v \mathbin{++} l_1 \mathbin{++} h \sim v \mathbin{++} l_2 \mathbin{++} h$

A Menge, G Gruppe

Sei $F(A)$ die freie Gruppe über A. Dann sind

Mengenabbildungen $A \to G$

in Bijektion mit Gruppenhomomorphismen

$F(A) \to G$

$$\frac{A \longrightarrow U(G)}{F(A) \longrightarrow G}$$

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Set} \arrow[r, bend left, "F"] & \mathrm{Group} \arrow[l, bend left, "U"] \end{tikzcd}$$

$F \dashv U$ sind adjungierte

Sei M Menge. Dann ist die Menge

$$S(M) : \{ f : M \to M \mid f \text{ ist Bijektion} \}$$

eine Gruppe ("der Permutationen von M")

$n \in \mathbb{N}$, $S_n := S(\overline{\text{Fin } n})$ $\quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \ldots$

Sei G Gruppe. Dann definiert

$$\begin{aligned} \pi : G &\longrightarrow S(G) \\ g &\longmapsto \lambda h.\, g \cdot h \quad (=: \pi_g) \end{aligned}$$

einen Gruppenhomomorphismus.

$$\pi(g_1 \cdot g_2) = \pi_{g_1} \circ \pi_{g_2} \qquad \underset{\shortparallel}{\pi_{g_1} \circ \pi_{g_2}}$$

$$\lambda h.\, (g_1 \cdot g_2) \cdot h = \lambda h.\, g_1 \cdot (g_2 \cdot h) = (\lambda x.\, g_1 x) \circ (\lambda y.\, g_2 y)$$

$\overline{\pi}_g$ ist Bijektion: Inverse ist $\overline{\pi}_{g^{-1}}$.

$$\overline{\pi}_{g^{-1}} \circ \overline{\pi}_g = \overline{\pi}_{g^{-1}\cdot g} = \overline{\pi}_e = id$$

$$\mu : \mathcal{P}(\mathbb{Z}) \longrightarrow \{0, \ldots, 4\}$$

$$\mu X = \#\{ j \mid j \cdot \mathbb{Z} \subseteq X ,\ j = 0, \ldots, 3 \}$$

$\mu(4 \cdot \mathbb{Z}) = 1$ und $\forall n \in \mathbb{Z}$. $\mu(n + 4 \cdot \mathbb{Z}) = 1$

und allgemein $X \subseteq \mathbb{Z}$. $n \in \mathbb{Z}$

$$\mu(n + X) = \mu(X)$$

analoger Versuch für F

$$\mu : \mathcal{P}(F) \longrightarrow \{0, \dots, 4\}$$

$$\mu X = \#\{ g \mid F_g \subseteq X,\ g \in \{\sigma, \sigma^{-1}, \tau, \tau^{-1}\} \}$$

$$\mu(F_\sigma) = 1$$

$$\mu(\pi_\sigma \cdot F_{\sigma^{-1}}) = 3$$

Eine <u>Operation</u> von Gruppe G auf Menge M:

$$\underline{\underline{\pi : G \longrightarrow S(M)}}$$ Gruppenhomomorphismus!!

$$\begin{aligned} \pi : F &\longrightarrow S(S^2) \\ \sigma &\longmapsto \ \vdots \\ \tau &\longmapsto \ \vdots \end{aligned}$$

Sei nun $m \in M$. Dann ist

$\mathrm{Stab}_\pi\, m := \{ g \in G \mid \pi_g\, m = m \}$, der „Stabilisator von m bei π"

ist Untergruppe von G!!

$\pi : G \to S(M)$ Operation gegeben.

$m \in M$.

Der <u>Orbit</u> von m unter π ist:

$$\mathcal{O}_\pi(m) = \{ \pi g m \mid g \in G \}$$

---

bei uns $G = F$ und $M = S^2$

und $\pi : F \to S(S^2)$ ist gegeben als die eindeutige

Fortsetzung von $'\sigma' \longmapsto \sigma$

$'\tau' \longmapsto \tau$

Symbole

<u>konkrete Rotationen</u>

$S^2 \to S^2$

$\pi : G \to S^2 \to S^2$

$\text{flip}\,\pi : S^2 \to G \to S^2$

Für $m \in M$ beliebig ist

$\mathcal{O}_\pi(m) = \text{image}(\text{flip}\,\pi\, m)$

$x \in S^2$ fix

$\forall w_1, w_2 \in \overline{F} \;.\; (w_1 x = w_2 x \Rightarrow w_1 = w_2)$

$\Leftrightarrow \forall w_1, w_2 \in \overline{F} \;.\; w_2^{-1} \cdot w_1 \cdot x = w_2^{-1} w_2 x = x \Rightarrow w_1 = w_2 \quad (*)$

$\overset{?}{\Leftrightarrow} \quad \forall w \in F \;.\; wx = x \Rightarrow w = \varepsilon \quad (**)$

"$\Rightarrow$" Seien $(*)$, $w \in F$, $wx = x$ angenommen.

Sei $w_1 = w$, $w_2 = \varepsilon$. Dann ist

$$w_2^{-1} \cdot w_1 \cdot x = \varepsilon^{-1} w x = \varepsilon \cdot w \cdot x = wx = x$$

mit $(*) \Rightarrow w_1 = w = \varepsilon$.

"$\Leftarrow$" Seien $w_1, w_2 \in \overline{F}$. $w_2^{-1} \cdot w_1 \cdot x = x$ und es gelte $(**)$

Sei $w := w_2^{-1} \cdot w_1$ mit $(**)$ gilt $w_2^{-1} \cdot w_1 = \varepsilon$.

Damit äq. zu $w_1 = w_2$.

$x \in S^2$ hat typischen Orbit $\iff$

$\mathrm{flip}\,\pi\, x$ injektiv

$\iff$

$$\operatorname{im}(\mathrm{flip}\,\pi\, x) = O_\pi(x)$$

$\mathrm{flip}\,\pi\, x$ eine Bijektion $F \xrightarrow{\sim} O_\pi(x)$ induziert.

$\mathrm{flip}\,\pi : S^2 \to F \to S^2$

$\mathrm{flip}\,\pi\, x : \underline{F \to S^2}$

$x \in S^2$ fix mit typischem Orbit

Haben: $F = A_1 \dot\cup A_2 \dot\cup B_1 \dot\cup B_2 \dot\cup B_3$ $(= \{e\})$ $\qquad \pi^F : F \to F_2 F$

$= A_1 \dot\cup \pi_\sigma[A_2]$ $\qquad (*)$

$= B_1 \dot\cup \pi_\tau[B_2]$

jetzt sei $\quad A_i(x) = \operatorname{flip} \bar\pi\, x\, [A_i]$ $\qquad \pi^{S^2} : F \to S^2 \to S^2$

analog $\quad B_i(x) = \quad \ldots$

Dann folgt aus $(*)$ (und $\operatorname{flip} \bar\pi\, x$ injektiv)

$$O_F x \; (= \operatorname{flip} \bar\pi\, x [F]) = A_1(x) \dot\cup A_2(x) \dot\cup B_1(x) \dot\cup B_2(x) \dot\cup B_3(x)$$

$$= A_1(x) \dot\cup \pi^{S^2}_\sigma [A_2(x)]$$

$$= B_1(x) \dot\cup \pi^{S^2}_\tau [B_2(x)]$$

$\bar{\pi}^F : F \to F \to F$

$\bar{\pi}^F_g \, g' = g \cdot g'$

Seien jetzt Σ und T beliebige Rotationen von S^2. Dann ist

$\bar{\pi}^{S^2} : F \to S^2 \to S^2$ definiert durch

$$\pi^{S^2} \sigma = \Sigma$$
$$\pi^{S^2} \tau = T$$

Hatten $\Sigma, T,$ und x so gewählt, daß $\text{flip}\, \pi^{S^2} x$ injektiv ist,

d.h. $O_{\pi^{S^2}} x \cong F$

$\bar{\pi} : G \to M \to M$ Gruppenoperation und

$f : M \to M'$ Bijektion, dann operiert G durch

$\pi' : G \to M' \to M'$ auf M' $\quad \bar{\pi}' g\, m' = f(\bar{\pi} g (f^{-1} m'))$

„neues" $A_1 := \bigcup_{\mathcal{O} \text{ typischer Orbit}} A_1(x_0^{\mathcal{O}})$

wobei $x_0 \in \mathcal{O}$ für typische Orbit $\mathcal{O}$ fest gewählt ist.
(Auswahlaxiom!)

$$S^2 = \bigcup_{x \in S^2} \mathcal{O}_F x = \dot{\bigcup} \{ \mathcal{O} \mid \mathcal{O} \text{ Orbit} \}$$

Wann ist $\mathcal{O}_F x = \mathcal{O}_F y$?

$\Leftrightarrow x \in \mathcal{O}_F y$

$\Leftrightarrow y \in \mathcal{O}_F x$

$$X \doteq \dot{\bigcup_{\dots}} \mathcal{O}_F x_0$$

$$= \bigcup \{ \mathcal{O} \mid \mathcal{O} \text{ typischer Orbit} \}$$

$$X = A_1 \dot\cup A_2 \dot\cup B_1 \dot\cup B_2 \dot\cup B_3$$

$$= A_1 \dot\cup \pi_\sigma^{S^2}[A_2]$$

$$= B_1 \dot\cup \pi_\tau^{S^2}[B_2]$$

Müssen solche Zerlegung für $S^2 \setminus D$ mit abzählbarem $D \subseteq S^2$ finden. Ist $S^2 \setminus X$ abzählbar sind wir also fertig (wie Hausdorff .. 3.1).

5.10.21

<u>Universalitätseigenschaft Freie Gruppe über $\{\sigma,\tau\}$:</u>

Mengenabb. $\qquad\qquad\qquad\qquad$ Gruppenhomomorphismen

$$\{\sigma,\tau\} \to G \quad \Longleftrightarrow \quad F\{\sigma,\tau\} \longrightarrow G$$

Bijektion

für <u>jede Gruppe G</u>.

allgemeiner: Ist A eine Menge, so heißt eine Gruppe FA "freie Gruppe über A", falls

$\forall$ Gruppen G gilt:

$$\mathrm{Hom}_{Set}(A, UG) \simeq \mathrm{Hom}_{Grp}(FA, G)$$

Dabei ist UG die G unterliegende Menge. Man sagt dann auch, F und U sind adjungiertes Funktorpaar, oder:

F ist linksadj. zu U

U ist rechts- zu F

Schreibweise : $F \dashv U$

Anderes Bsp. : E Menge . $\langle E \rangle$ freie $\mathbb{R}$-VR über E.

Univers.. Eig. : $\mathrm{Hom}_{Set}(E, UV) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}\text{-VR}}(\langle E \rangle, V)$

12.10.21

Banach Tarski 3.5.

$$X = \{ x \in S^2 \mid O_F(x) \text{ ist typisch} \}$$

$$= \bigcup_{\substack{x \in S^2 \\ O_F(x) \text{ typisch}}} O_F(x)$$

$\forall x \in S^2 .\quad O_F(x)$ typisch $\Leftrightarrow$
$\exists y \in S^2 .\ O_F(y)$ typisch
und $x \in O_F(y)$

$$x \in O_F(y) \Leftrightarrow O_F(x) = O_F(y)$$

$$S^2 = \bigcup_{x \in S^2} O_F(x) = X \cup \bigcup_{\substack{x \in S^2 \\ O_F x \text{ nicht typisch}}} O_F x$$

Wählen aus jedem Orbit $\mathcal{O}$ ein Element : x_0.

$$S^2 = \dot\bigcup \mathcal{O}_F(x_0) = \dot\bigcup_{\mathcal{O}\text{ typisch}} \mathcal{O}_F(x_0) \;\dot\cup\; \dot\bigcup_{\mathcal{O}\text{ nicht typisch}} \mathcal{O}_F(x_0)$$

$$\mathcal{O}_F : S^2 \longrightarrow \mathcal{P}(S^2)$$

nicht injektiv!

$$\mathcal{O}_F(x) = \mathcal{O}_F(y) \iff y \in \mathcal{O}_F(x)$$

$$\mathcal{O} = \{ \mathcal{O}_F(x) \mid x \in S^2 \} = \operatorname{im} \mathcal{O}_F \subseteq \mathcal{P}(S^2)$$

Menge der Orbiten (ist Menge nichtleerer Mengen, da $x \in \mathcal{O}_F(x)$)

↳ Haben nun Auswahlfunktion : $a : \mathcal{O} \longrightarrow S^2$ mit

$$\mathcal{O}_F(a\mathcal{O}) = \mathcal{O}$$

$A_i, B_i : S^2 \longrightarrow \mathcal{P}(S^2)$ $\leftarrow$ $A_i(x)$ hängt nicht nur von $O_F(x)$ ab, sondern von x !

$A_i(x) \subseteq O_F(x)$ $\longleftarrow$ andere analog

Brauchen deshalb x_0-Auswahl

Drehungen des $\mathbb{R}^3$ sind

(*) $\begin{cases} \bullet \text{ lineare Abbildungen (also durch Matrix } Q \text{ darstellbar)} \\ \bullet \ \det Q = 1 \\ \bullet \ Q^T \cdot Q = \mathrm{Id} \end{cases}$

Matrixprodukt erhält diese Eigenschaften, σ und τ sind Drehungen, haben also diese Eigenschaften,

$\Rightarrow$ alle Elemente aus F haben (*) erfüllt.

Wollen zeigen: (*) $\Rightarrow \exists\, x \in S^2 .\ Qx = x$

bzw. $(Q - \mathrm{Id})\, x = 0$

Also genügt z.z. $\operatorname{rang}(Q - Id) < 3$

$$\left(Q^T \cdot Q = Id \implies \det Q = \pm 1 \right)$$

$$\operatorname{rang}(Q - Q \cdot Q^T) = \operatorname{rang}(Q(Id - Q^T))$$
$$= \operatorname{rang}(Id - Q^T) \quad \ldots$$

Wir fixieren also σ, τ so, daß nur $\{e\} \in F$ trivial operiert.

Jedes Wort $w \in F$ stellt Rotation dar, hat also 2 Fixpunkte auf S^2. D.h. es gibt nur abzählbar viele Punkte in S^2, für die ein $w \in F$ existiert mit $w(x) = x$.

$\exists\, \omega \in F \setminus \{e\},\ \omega(x) = x \iff O_F(x)$ nicht typisch

Also: es existieren nur abzählbar viele $x \in S^2$ mit $O_F(x)$ nicht typisch.