15.10. Bag equality

Üblicherweise $xs =_{ListA} ys$ "normale" Listengleichheit

xs, ys sind dabei Listen, ~~über~~ mit Einträgen aus A.

$xs : ListA \qquad ys : ListA$

$$xs =_{ListA} ys \;=\; \_=_{ListA}\_ \;\; xs \;\; ys$$

$A : Type$

$xs =_{ListA} ys \;:\; Prop$

$\_=_{ListA}\_ \;:\; ListA \to ListA \to Prop$

$\_=_{BagA}\_ \;:\; ListA \to ListA \to Prop$

$\_=_{B}\_ \;:\; B \to B \to Prop$

Danielsson:

$xs =_{\mathrm{BagA}} ys$:= Existenz einer Bijektion zwischen Menge von Enthaltenseins-Beweisen ("membership proofs")

$B_{a \in A} := \{ p \mid p$ Beweis für $a \in A \}$

woher?

$f : B_{a \in xs} \to B_{a \in ys}$

$\forall a : A.\ \exists f, g.$

$$\begin{tikzcd} B_{a \in xs} \arrow[r, bend left, "f"] & B_{a \in ys} \arrow[l, bend left, "g"] \end{tikzcd}$$

mit $g \circ f = \mathrm{id}_{B_{a \in xs}}$ und $f \circ g = \mathrm{id}_{B_{a \in ys}}$

Sei $F : \mathrm{Type} \to \mathrm{Type}$ Funktor mit

X hat entscheidbare Gleichheit $\Rightarrow$

FX hat entscheidbare Gleichheit

Dann läßt sich eine entscheidbare Membership relation definieren

$$\_\in\_ : X \to FX \to \mathrm{Type} \quad \text{mit}$$

$$\forall x, xs \quad x \in xs + x \notin xs$$

```
data List (A : Set) : Set where
  [] : List A
  _::_ : A → List A → List A
```

$\text{List} : \text{Set} \to \text{Set}$

```
map : ∀{A B}. (A → B) → List A → List B
map f []       = []
map f (a :: as) = f a :: map f as
```

map id = id
map (f ∘ g) = map f ∘ map g

List ist nicht nur ein Funktor, sondern auch eine Monade

$\eta : \{A : \text{Set}\} \to A \to \text{List}\ A$

$\_ \gg\!= \_ : \{A, B : \text{Set}\} \to \text{List}\ A \to (A \to \text{List}\ B) \to \text{List}\ B$

$\forall (f : A \to FB).\ \forall\, as, bs : FA$

$as \equiv_{bag} bs \Rightarrow as \gg= f \equiv_{bag} bs \gg= f$

"the List monads bind preserves bag equality"

$\eta : A \to \mathrm{List}\,A \qquad \eta\, a = a :: []$

(and pure, return)

$\_ \gg= \_ : \mathrm{List}\,A \to (A \to \mathrm{List}\,B) \to \mathrm{List}\,B$

$[] \gg= f = []$

$(a :: as) \gg= f = f a +\!\!+ \; as \gg= f$

$\_ \gg= \eta : \mathrm{List}A \to \mathrm{List}A$

$= id$

$\underbrace{\eta a}_{= [a] : \mathrm{List}A} \gg= \underbrace{f}_{A \to \mathrm{List}B} = \underbrace{fa}_{\mathrm{List}\,B}$

und "Assoz." von bind ...

$\_ >=> \_ : (A \to \mathrm{List}B) \to (B \to \mathrm{List}C) \to$

$A \to \mathrm{List}\,C$ ⟸ "Kleisli-Composition"

$(f >=> g)\, a = f a \gg= g$

d.h. composition in der Kleisli-Kategorie zur List-Monade